

Aufgabe 24: Freier Fall auf der Erde im rotierenden Bezugssystem

Skript: 2.9 Rotierendes Bezugssystem

Literatur: Nolting Band 1 Klassische Mechanik. 2.2.4 Rotierende Bezugssysteme, Scheinkräfte
Goldstein. Klassische Mechanik. 4.10 Der Coriolis-Effekt

Betrachten Sie zunächst einen Körper, der mit verschwindender Anfangsgeschwindigkeit (relativ zur Oberfläche) aus der Höhe h fallengelassen wird. Berechnen Sie, in welcher Entfernung vom Lot der Körper auftrifft.

Berechnen Sie denselben Effekt für einen Körper, der senkrecht bis zu einer Höhe h hochgeworfen wird.

Hinweise:

- Verwenden Sie die folgenden Werte: $h = 100 \text{ m}$, $g = 9,82 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ und geographische Breite $\theta = 50^\circ$
- Vernachlässigen Sie Effekte $\sim \omega^2$ (mit ω der Rotationsfrequenz der Erde) und Effekte, die durch Luftwiderstand hervorgerufen würden.

Aufgabe 25: Das Problem der Dido

Skript: 3.2 Variationsrechnung: Variation mit Nebenbedingungen

Literatur: Nolting Band 2 Analytische Mechanik. 1.3 Das Hamiltonsche Prinzip
Goldstein. Klassische Mechanik. 2.1 Das Hamilton-Prinzip & 2.4 Die Erweiterung des Hamiltonschen Prinzips auf Systeme mit Randbedingungen

Der Gründungssage Karthagos nach war Dido die Prinzessin des phönizischen Tyros (heute im Libanon), die auf der Flucht vor ihrem Bruder Pygmalion an den Golf von Tunis kam. Dort wurde ihr soviel Land versprochen, wie sie mit einer Kuhhaut umspannen könne. Sie schnitt die Kuhhaut in schmale Streifen und markierte so ein großes Stück Land mit dem Meer als zweiter Begrenzung, welches die Keimzelle des späteren Karthago gebildet haben soll. Berechnen Sie bei vorgegebener Länge l der Kuhhaut die Kurve $y(x)$, die zusammen mit der geraden Verbindungslinie zweier Punkte P_1, P_2 die größtmögliche Fläche einschließt.

Hinweise:

Dazu muss das Extremum von folgendem Funktional bestimmt werden:

$$S = \int dx \left[y(x) + \left(\sqrt{1 + y'^2} - l \right) \right] \equiv \int dx \tilde{L}(y, y', x)$$

Versucht dies zu begründen.

Aufgabe 26: Foucaultsches Pendel

Skript: 2.9 Rotierendes Bezugssystem

Literatur: Nolting Band 1 Klassische Mechanik. 2.2.4 Rotierende Bezugssysteme, Scheinkräfte
Goldstein. Klassische Mechanik. 4.10 Der Coriolis-Effekt

Die Rotation der Erde lässt sich sehr überzeugend mittels des Foucault-Pendels beweisen. Das Foucault-Pendel hat eine schwere Masse m an einem sehr langen Faden mit vernachlässigbarer Masse der Länge L . Berechnen Sie für ein Pendel bei geographischer Breite θ , das im Koordinatenursprung eines erdfesten Systems aufgehängt ist, wie sich aufgrund der Erdrotation (mit Winkelgeschwindigkeit ω) die Schwingungsebene des Pendels langsam dreht.

Hinweise:

- Gehen Sie von kleinen Ausschlägen aus und verwenden Sie in dem erdfesten Bezugssystem die kartesischen Koordinaten x, y, z (z =Höhe).
- Vernachlässigen Sie Terme höherer Ordnung in $L - z$ und in $\dot{z}$ sowie die Zentrifugalkraft (Terme in ω^2), und zeigen Sie, dass sich das Potential dann als $V(x, y) = \frac{mg}{2L}(x^2 + y^2)$ annähern lässt.
- Lösen Sie die resultierenden Bewegungsgleichungen für x und y , indem Sie in ein relativ zum erdfesten System rotierendes System übergehen.